



Université Mohammed V—Agdal
Faculté des Sciences Juridiques,
Économiques et Sociales, Rabat

Session : Printemps - Été 2006/2007

Semestre : **S2**

Filière de Sciences Économiques et de Gestion

Sections : **A et B**

Professeure : Amale LAHLOU

Module 6 : Méthodes Quantitatives I

Matière : Mathématiques I

Série 2

Thèmes : Dérivée et différentielle, Dérivées successives, Formule de LEIBNIZ, Théorème de ROLLE, Théorème des Accroissements Finis, Règle de l'HOSPITAL, convexité et Extremums.

Exercice 1 : Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes et déterminer son domaine de définition.

$$f(x) = x^2 \ln|2x+1|; \quad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

Exercice 2 : Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur \mathbb{R} . En déduire si ces fonctions sont de classe C^1 sur \mathbb{R} .

$$f(x) = |x-1| + |x^2 - 2x - 3|; \quad g(x) = \begin{cases} \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1} & x \neq 1; \\ 1 & x = 1 \end{cases}; \quad h(x) = \begin{cases} \ln(1 + e^{-x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 3 : Déterminer les réels a et b pour que $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & x > 1 \end{cases}$ soit dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 4 : Déterminer la différentielle de chacune des fonctions suivantes :

$$y_1 = x \ln(x) - x \quad y_2 = \ln(\sqrt{1+x^2}) \quad y_3 = (2x+1)^{x+1}$$

Exercice 5 : Déterminer la tangente au point d'abscisse 1 de la fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ puis étudier la position relative de cette tangente par rapport à la courbe représentative de f .

Exercice 6 : Calculer l'expression $f''(x) + (1 + \ln(x))(f'(x))^2$ où la fonction $f(x) = \ln(\ln(x))$.

Exercice 7 : Calculer les dérivées d'ordre $n \in \mathbb{N}$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2x+1}; \quad g(x) = \ln(1+2x); \quad h(x) = (2x+1)^{n-1}.$$

Exercice 8 : Sans utiliser la formule de LEIBNIZ, calculer la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de :

- la fonction $f(x) = xe^x$. En déduire que $f^{(n)}(x) - (n+x)e^x = 0$;
- la fonction $g(x) = (x+1)e^{-x}$, puis montrer qu'il existe deux réels a_n et b_n (à expliciter) tels que $g^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x}$.

Exercice 9 : En utilisant la formule de LEIBNIZ, calculer la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+1}; \quad g(x) = (2x+1)\ln(2x+1); \quad h(x) = x^2(2x+1)^{n-1}.$$

Quelle est la valeur de $f^{(5)}(0)$, $g^{(5)}(0)$ et de $h^{(5)}(0)$.

Exercice 10 : Peut-on appliquer Le théorème de ROLLE aux fonctions définies ci-dessous ? Si oui, déterminer le(s) point(s) le vérifiant :

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + x + 1) & -1 \leq x \leq 1 \\ 3x - 6 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{sur } [-1, 2]; \quad g(x) = e^{x^4 - 3x^2 + 2} \quad \text{sur } [-2, 2]$$

Exercice 11 : Montrer que :

- l'équation $e^x = 2 + x$ admet une unique solution dans l'intervalle $I = [\ln 2, 2 \ln 2]$;
- l'équation $1 + \ln(2 + x^2) = 3x$ admet une unique solution dans l'intervalle $I = [0, 1]$;
- l'équation $x^2 + \ln(1 + x) = 0$ n'admet que 0 comme solution ;
- l'équation $x^3 + 9x^2 - 4 = 0$ n'admet qu'une solution strictement positive.

Exercice 12 : En appliquant le Théorème des Accroissements Finis à :

- $f(x) = \ln(1 + x)$ sur l'intervalle $[x, 2x]$, $x > 0$, démontrer que $\forall x > 0 \quad \frac{x}{1+2x} < \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) < \frac{x}{1+x}$;
- $g(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0, x]$, $x > 0$, étudier le signe de $e^x(x-1) + 1$.

Exercice 13 : En appliquant la règle de l'HOSPITAL, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2(x))}{\cos(x) - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1 - x)}{x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x) + e^x}{x + e^x}.$$

Exercice 14 : Déterminer, lorsqu'ils existent, les extremums et les points d'inflexions des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^4 - x^3 + 1; \quad g(x) = x^2 e^{-x}.$$

Exercice 15 : Déterminer pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \frac{ax^2}{x-1}$ est convexe (resp. concave) sur $]1, +\infty[$.

À retenir :

- *Le Théorème de ROLLE et ses applications*
- *La Formule des Accroissements Finis et ses applications*
- *La règle de l'HOSPITAL applicable la Forme Indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$*
- *Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité*
- *Les conditions nécessaires et suffisantes de convexité*

Un petit test de connaissances

	Vrai	Faux
1. Le domaine de définition de la fonction dérivée f' coïncide avec celui de f	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Toute fonction non continue en un point est non dérivable en ce point	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Si une fonction dérivable f est paire sur D_f alors sa dérivée f' est impaire sur D_f .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. « La dérivée première nulle » est une condition nécessaire et suffisante d'optimalité	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. La fonction f est concave sur l'intervalle I si $(-f)$ est convexe sur I	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>